

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2014/15

Appello del 26 gennaio 2015

1. Siano date in S_{18} le seguenti due permutazioni:

$$\sigma = (1, 2)(3, 4)(14, 15, 16, 17, 18)$$

$$\tau = (1, 4, 2, 3)(5, 6, 7, 8, 9, 10)(11, 12, 13)$$

(a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.

(b) Determinare un sottogruppo ciclico di S_{18} contenente $\langle \sigma \rangle \cup \langle \tau \rangle$.

2. Dato l'anello di matrici $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$, si consideri l'applicazione

$$\varphi: A \rightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$$

tale che, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $\varphi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = ([a]_3, [d]_7)$.

Sia inoltre B un sottoanello non banale di A tale che la restrizione di φ a B sia un omomorfismo di anelli.

(a) Trovare B commutativo e dotato di unità.

(b) Trovare B commutativo e privo di unità

(c) Trovare B non commutativo.

3. Sia $f(x) = 4x^7 + 3x^5 - x^3 - 4x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

(a) Determinare una fattorizzazione di $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Dire, giustificando la risposta, se la riduzione di $f(x)$ modulo 3 si decompone in $\mathbb{Z}_3[x]$ nel prodotto di fattori lineari.