CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2012/13

<u>Appello del 13 gennaio 2014</u>

1. Si considerino le seguenti permutazioni di S_{13}:

$$\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9)(10,11,12,13)$$
$$\beta = (1,2,3,4)(5,6,7,8,9)(10,11)(12,13)$$

(a) Provare che $\langle\alpha\rangle \cap \langle\beta\rangle$ è il sottogruppo banale.

(b) Sia H un sottogruppo di S_{13} al quale appartengono α e β. Determinare, in H, un sottogruppo commutativo e non ciclico.

2. Siano r, s numeri interi. Si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_7^*$$

tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_2, [b]_6) = ([r]_5^{\,a}, [s]_7^{\,b})$.

(a) Dire per quali r,s l'applicazione φ è ben definita.

(b) Dire per quali r,s l'applicazione φ è un monomorfismo di gruppi.

(c) Per $r = 1, s = 2$ determinare $\varphi^{-1}([1]_5, [1]_7)$.

3. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^{9604} + 5x^3 - 18x^2 - 20x + 30 \in \mathbb{Z}[x].$$

(a) Provare che $f(x)$ non ha radici multiple in $\mathbb{Z}$.

(b) Detta $\overline{f(x)}$ la riduzione di $f(x)$ modulo 13, determinare quattro polinomi $h(x) \in \mathbb{Z}_{13}[x]$ aventi grado 1 e tali che $[h(x)]$ non sia invertibile in $\mathbb{Z}_{13}[x] \big/ \left(\overline{f(x)}\right)$.