

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2012/13

Appello del 2 luglio 2013

1.

(a) Determinare tutti i numeri primi $p > 0$ per i quali l'insieme

$$H_p = \{\sigma \in S_{12} \mid o(\sigma) \text{ divide } p\}$$

è un sottogruppo di S_{12} .

(b) Dire se l'insieme $H = \{\sigma \in S_{12} \mid o(\sigma) \text{ divide } 3465\}$ è un sottogruppo di S_{12} .

2. Sia n un intero positivo. Si consideri l'applicazione

$$\varphi_n : \mathbb{Z}_5[x] \times \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$$

tale che, per ogni $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{Z}_5$,

$$\varphi_n((f(x), \alpha)) = f(\alpha)^n.$$

(a) Determinare l'insieme degli interi positivi n per i quali φ_n è surgettiva.

(b) Trovare un intero positivo n ed un elemento β di \mathbb{Z}_5 in modo tale che $\varphi_n^{-1}(\beta)$ sia l'insieme vuoto.

3. Sia $f(x) = x^8 + 2x^7 + 3x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2 \in \mathbb{R}[x]$.

(a) Sia ω una radice cubica complessa e non reale di 1. Provare che ω è radice multipla di $f(x)$.

(b) Determinare una fattorizzazione di $f(x)$ in $\mathbb{R}[x]$.

(c) Determinare una fattorizzazione in $\mathbb{Z}_3[x]$ della riduzione di $f(x)$ modulo 3.