

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

**Algebra n.1**

**Anno Accademico 2011/12**

**Appello del 3 luglio 2012**

1. Sia  $n$  un intero maggiore di 1, e sia  $H$  l'insieme delle permutazioni di  $S_n$  che non lasciano fisso l'elemento 1.

- (a) Determinare la cardinalità di  $H$ .
- (b) Provare che  $H$  non è contenuto in nessun sottogruppo proprio di  $S_n$ .
- (c) Per  $n = 6$ , determinare la cardinalità dell'insieme delle permutazioni dispari appartenenti ad  $H$ .

2.

- (a) Determinare tutti i numeri interi  $n$  per i quali 77 divide  $4^{n^2+n+13} - 1$ .
- (b) Determinare un primo dispari  $p$  tale che, per ogni intero  $n$ ,  $p$  non divida  $4^{n^2+n+13} - 1$ .

3. Sia  $n$  un numero maggiore di 1.

- (a) Provare che il polinomio  $f(x) = x^{2n} - 2x^{2n-4} - 2^{n-1}$  possiede in  $\mathbb{Q}[x]$  un fattore irriducibile di grado 2.
- (b) Provare che la riduzione di  $f(x)$  modulo 7 ha almeno due radici in  $\mathbb{Z}_7$ .