

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2011/12

Appello del 19 giugno 2012

1. Sia $H = \{\sigma \in S_{19} \mid \sigma(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\}\}$.

- (a) Provare che H è un sottogruppo di S_{19} .
- (b) Dire se esiste un elemento di H avente periodo 55.
- (c) Trovare due sottogruppi K_1 e K_2 di H aventi ordine 60 e tali che $K_1 \cap K_2 = \{\text{id}\}$.

2. Sia data l'applicazione $\varphi: \mathbb{Z}_{210} \rightarrow \mathbb{Z}_{210}$ definita ponendo, per ogni $\alpha \in \mathbb{Z}_{210}$,

$$\varphi(\alpha) = \alpha^{53}.$$

- (a) Dire se φ è un omomorfismo di anelli.
- (b) Dire se φ induce, per restrizione e corestrizione, un automorfismo del gruppo delle unità di \mathbb{Z}_{210} .

3. Sia p un numero primo positivo, e sia a un numero intero.

- (a) Provare che la riduzione modulo p del polinomio $f(x) = x^{2p} - a^{p-1}$ si decompone, in $\mathbb{Z}_p[x]$, nel prodotto di fattori lineari.
- (b) Determinare un numero primo p , un intero positivo n ed un intero a tali che la riduzione modulo p del polinomio $g(x) = x^n - a^{p-1}$, non si decomponga, in $\mathbb{Z}_p[x]$, nel prodotto di fattori lineari.