

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

**Algebra n.1**

**Anno Accademico 2011/12**

**Appello del 18 gennaio 2012**

1. Siano dati i seguenti elementi di  $S_{16}$  :

$$\sigma = (1, 7, 13, 9, 2)(3, 8, 4)(5, 11, 12, 6, 10, 15, 14, 16)$$

$$\tau = (14, 10, 12, 5)(8, 4, 3)(15, 6, 11, 16).$$

(a) Determinare  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$ .

(b) Determinare, se possibile, un sottogruppo di  $S_{16}$  avente ordine 24 e contenente  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$ .

2. Sia  $n$  un intero maggiore di 1. Si consideri l'applicazione

$$\varphi_n : \mathbb{Z}_{2n} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$$

tale che, per ogni  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $\varphi_n([a]_{2n}) = ([a]_2, [10a]_n)$ .

(a) Determinare  $\varphi_8^{-1}([0]_2, [0]_8)$ .

(b) Determinare tutti i valori di  $n$  per i quali  $\varphi_n$  è un isomorfismo di gruppi additivi.

(c) Determinare tutti i valori di  $n$  per i quali  $\varphi_n$  è un isomorfismo di anelli.

3. Sia dato il polinomio  $f(x) = x^{3528} + x - 36 \in \mathbb{Z}[x]$ .

(a) Determinare tutti le radici in  $\mathbb{Z}_{43}$  della riduzione di  $f(x)$  modulo 43.

(b) Determinare tutti le radici in  $\mathbb{Z}_7$  della riduzione di  $f(x)$  modulo 7.