

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2010/11

Appello del 1° luglio 2011

1. Siano dati i seguenti elementi di S_{16} :

$$\sigma = (3,15,7,10,4)(5,6,8,14,12,13,9)$$

$$\tau = (1,11)(2,16)(5,12,6,13,8,9,14)$$

$$\rho = (1,2,11,16)$$

$$\alpha = (1,2,11,16)(3,15,7,10,4)(5,6,8,14,12,13,9).$$

- (a) Determinare tutti gli elementi di $\langle \alpha \rangle$ aventi periodo 14.
- (b) Provare che $\langle \alpha \rangle$ è il più piccolo sottogruppo di S_{16} contenente $\{\sigma, \tau, \rho\}$.
- (c) Determinare un gruppo di ordine 28 contenente $\{\tau, \rho\}$.

2. Siano m ed n interi maggiori di 1. Data una coppia $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, si consideri l'applicazione

$$\varphi_{a,b} : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{mn}$$

tale che, per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$, $\varphi_{a,b}([x]_m, [y]_n) = [ax + by + 1]_{mn}$.

- (a) Determinare tutte le coppie $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ per le quali l'applicazione $\varphi_{a,b}$ è ben definita.
- (b) Determinare tutte le coppie $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ per le quali l'applicazione $\varphi_{a,b}$ è iniettiva.

3. Siano dati i polinomi

$$f(x) = x^{100002} + x^{100000} - 13333x^2 - 13333 \in \mathbb{Z}[x],$$

$$g(x) = x^4 + 34x^2 + 33 \in \mathbb{Z}[x].$$

- (a) Determinare tutti le radici complesse comuni a $f(x)$ e $g(x)$.
- (b) Dette $\overline{f(x)}$ e $\overline{g(x)}$ le riduzioni di $f(x)$ e $g(x)$ modulo 101, determinare $\text{MCD}(\overline{f(x)}, \overline{g(x)})$.