

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2009/10

Appello del 1° giugno 2010

1. Data la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 10 & 13 & 6 & 11 & 12 & 9 & 1 & 2 & 4 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in S_{13},$$

sia $H = \langle \sigma^{8440} \rangle$.

(a) Determinare $|H|$.

(b) Determinare, se possibile, un sottogruppo di H avente ordine 3.

2. Determinare tutti gli elementi $\alpha \in \mathbb{Z}_{34}$ tali che $\alpha^2 = \alpha$.

3. Sia $f(x) = x^5 + 10x^4 + 39x^3 + 96x^2 + 198x + 216 \in \mathbb{Z}[x]$.

(a) Dire se $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$;

(b) detta $\bar{f}(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ la riduzione modulo 7 di $f(x)$, determinare una sua fattorizzazione in $\mathbb{Z}_7[x]$;

(c) dire se $[x]$ è invertibile in $\mathbb{Z}_7[x] / (\bar{f}(x))$, e in caso affermativo determinare il suo inverso.