

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2009/10

Appello del 15 febbraio 2010

1. Data la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 10 & 14 & 7 & 2 & 6 & 9 & 13 & 12 & 8 & 3 & 1 & 4 & 11 & 5 \end{pmatrix} \in S_{14},$$

sia $H = \langle \sigma^{1247} \rangle$.

(a) Determinare $|H|$.

(b) Determinare tutte le permutazioni $\tau \in H$ tali che $\tau(1) = 1$.

2. Siano n, m interi maggiori o uguali a 2.

(a) Quante sono le coppie (m, n) per le quali l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{Z}_{12} &\rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, \\ [x]_{12} &\mapsto ([x]_m, [x]_n) \end{aligned}$$

risulta ben definita?

(b) In corrispondenza di $m=6, n=4$ si determinino la controimmagine di $([3]_6, [1]_4)$ e un elemento di $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$ che non ha controimmagine.

3. Sia $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 + 7x + 63 \in \mathbb{Z}[x]$.

(a) Scrivere una fattorizzazione di $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$;

(b) detta $\bar{f}(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ la riduzione modulo 3 di $f(x)$, determinare una sua fattorizzazione in $\mathbb{Z}_3[x]$;

(c) dire se $[x + \bar{2}]$ è invertibile in $\mathbb{Z}_3[x] / (\bar{f}(x))$, e in caso affermativo determinare il suo inverso.