

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

**Algebra n.1**

**Anno Accademico 2009/10**

**Appello del 1° febbraio 2010**

1. Si consideri la seguente permutazione:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 9 & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in S_9.$$

- (a) Determinare  $\tau = \sigma^{-4838}$ .
- (b) Dire se  $\tau$  è pari o dispari.

2. Assegnata l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{Z}_{60} &\rightarrow \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20}, \\ [x]_{60} &\mapsto ([x]_{12}, [x]_{20}) \end{aligned}$$

- (a) si verifichi che  $\varphi$  è ben definita ed è un omomorfismo di anelli e se ne determini il nucleo;
- (b) si determini la controimmagine  $\varphi^{-1}([3]_{12}, [7]_{20})$ ;
- (c) si determini un elemento di  $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20}$  che non ha controimmagine.

3. Sia  $f(x) = x^4 + 20x^3 - 21x^2 + 56x - 56 \in \mathbb{Z}[x]$ .

- (a) Scrivere una fattorizzazione di  $f(x)$  in  $\mathbb{Q}[x]$ ;
- (b) detta  $\bar{f}(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$  la riduzione modulo 3 di  $f(x)$ , determinare una sua fattorizzazione in  $\mathbb{Z}_3[x]$ ;
- (c) dire se  $[x]$  è invertibile in  $\mathbb{Z}_3[x]/(\bar{f}(x))$ , e in caso affermativo determinare il suo inverso.