

Corso di Laurea in Matematica
Programma di Algebra n.1
Prof.ssa Margherita Barile

Insiemi e relazioni:

Relazioni, relazioni funzionali, applicazioni iniettive, surgettive, bigettive. Composizione di applicazioni, applicazioni invertibili. Relazioni di equivalenza, classi di equivalenza, insieme quoziente, sistema completo di rappresentanti. Relazioni d'ordine.

Gli insiemi numerici:

Una presentazione di \mathbb{N} , il principio di induzione, le dimostrazioni per induzione. Il principio del minimo. La relazione di divisibilità in \mathbb{N} , i numeri primi. L'algoritmo di divisione euclidea in \mathbb{Z} . La relazione di divisibilità in \mathbb{Z} . Il M.C.D. e l'identità di Bézout, l'algoritmo delle divisioni successive. Il teorema fondamentale dell'aritmetica. Il teorema di Euclide sull'infinità dei numeri primi. I numeri complessi come coppie ordinate di numeri reali, operazioni in \mathbb{C} , forma algebrica e forma trigonometrica, le radici n -esime di un numero complesso, l'enunciato del teorema fondamentale dell'algebra.

Strutture algebriche ed omomorfismi:

Gruppi e loro proprietà elementari, gruppi abeliani, sottogruppi, gruppi ciclici e loro generatori, periodo di un elemento, il teorema di Lagrange sul periodo degli elementi di un gruppo abeliano finito. Anelli e loro proprietà elementari, anelli commutativi, anelli unitari, elementi invertibili, domini di integrità, campi, sottoanelli, sottocampi. Anelli di matrici. Prodotto diretto di gruppi e di anelli. Omomorfismi, monomorfismi, epimorfismi, isomorfismi, nucleo di un omomorfismo.

L'anello dei polinomi:

Polinomi, grado di un polinomio. Operazioni tra polinomi. Polinomi a coefficienti in un dominio, la formula del grado. L'algoritmo della divisione euclidea tra polinomi in $K[x]$. Il M.C.D. e l'identità di Bézout, l'algoritmo delle divisioni successive. Radici di un polinomio, il criterio di Ruffini. Polinomi irriducibili e fattorizzazione, polinomi associati, polinomi monici. Campi algebricamente chiusi e polinomi irriducibili. L'enunciato del teorema di Gauss e la fattorizzazione in $\mathbb{Q}[x]$. La riduzione modulo p , il criterio di Eisenstein. Polinomi irriducibili in $\mathbb{C}[x]$ e in $\mathbb{R}[x]$.

Strutture quozienti:

La congruenza modulo n in \mathbb{Z} . L'anello delle classi di resto \mathbb{Z}_n . La congruenza lineare in \mathbb{Z} e l'equazione di I grado in \mathbb{Z}_n . Il gruppo degli elementi invertibili in \mathbb{Z}_n . I campi \mathbb{Z}_p . La funzione di Eulero. Il teorema cinese del resto. Il piccolo teorema di Fermat, il teorema di Eulero. La congruenza modulo f in $K[x]$. L'anello delle classi resto modulo f , il sistema di rappresentanti canonici. Elementi invertibili in $K[x]/(f)$; il caso dei polinomi irriducibili.

Il gruppo simmetrico:

L'azione naturale di S_n su $X = \{1, \dots, n\}$. Orbite e cicli associati ad una permutazione. Decomposizione in cicli disgiunti. Parità e segno di una permutazione, il gruppo alterno A_n .

Testi consigliati:

Appunti di Algebra I, Giulio Campanella (Nuova Cultura)
Algebra, G.M. Piacentini Cattaneo (Decibel- Zanichelli)
Elementi di Algebra, S. Franciosi, F. de Giovanni (Aracne Editrice)
Algebra, I.N. Herstein (Editori Riuniti).
Aritmetica e algebra, D. Dikranjan, M.S. Lucido (Liguori Editore).